

Elea: Nauč sa matiku – pravdepodobnosť

Valdemar Švábenský

10. mája 2020

Úvod

Tento učebný text zhŕňa najdôležitejšie poznatky z pravdepodobnosti. Aj keď som na túto tému absolvoval asi štyri kurzy, poriadne som ju pochopil až na predmete *IV111 Probability in Computer Science* na Fakulte informatiky Masarykovej univerzity pod vedením doc. RNDr. Vojtěcha Řeháka, Ph.D., za čo mu ďakujem.

Text vznikol postupne počas prípravy mojich videí o pravdepodobnosti; všetky videá sú dostupné na [v tomto YouTube playliste](#). Pri každej podkapitole sú uvedené linky na súvisiace videá.

Otázky a spätná väzba, či už poďakovanie, oprava chýb, konštruktívna kritika, návrhy na zlepšenie, alebo pozvanie na pivo sú vítané. Kontakt na mňa je k dispozícii na webe <https://www.elea.sk>. Držím palce všetkým, ktorí sa rozhodli venovať štúdiu tejto krásnej oblasti matematiky.

Licencia a právo na použitie

Dokument je chránený autorským právom a nie je možné ho zdieľať ani inak používať bez súhlasu autora.

Obsah

1	Základy pravdepodobnosti	2
1.1	Udalosti	2
1.2	Klasická pravdepodobnosť	4
1.3	Geometrická pravdepodobnosť	4
1.4	Pravdepodobnostná funkcia	4
2	Podmienená pravdepodobnosť	4
2.1	Nezávislé udalosti	4
2.2	Veta o úplnej pravdepodobnosti	4
2.3	Bayesova veta	4

3	Diskrétne rozdelenia pravdepodobnosti	4
3.1	Náhodná premenná a súvisiace funkcie	4
3.2	Diskrétne rovnomerné rozdelenie	4
3.3	Bernoulliho (alternatívne) rozdelenie	4
3.4	Geometrické rozdelenie	4
3.5	Binomické rozdelenie	4
3.6	Simultánne a marginálne rozdelenie pravdepodobnosti	4
4	Stredná hodnota	4
4.1	Stredné hodnoty diskretných rozdelení	4
4.2	Vlastnosti strednej hodnoty	4
4.3	Markovova nerovnosť	4
5	Rozptyl	4
5.1	Rozptyly diskretných rozdelení	4
5.2	Vlastnosti rozptylu	4
5.3	Čebyševova nerovnosť	4

Kapitola 1: Základy pravdepodobnosti

Súvisiace video: [Čo je to pravdepodobnosť?](#)

1.1 Udalosti

Definícia 1.1. *Náhodný experiment* je opakovateľný proces s nejasným výsledkom. To znamená, že jeho výsledok nevieme určiť vopred, a pri rôznych opakovaníach môžeme dostávať rôzne výsledky.

Príklad 1.2. Hod klasickou férovou mincou je náhodný experiment. Môžu nastať výsledky “panna” (hlava mince) alebo “orol” (zadná strana).

Definícia 1.3. *Základný priestor* je množina S všetkých možných výsledkov náhodného experimentu.

Príklad 1.4. Pri náhodnom experimente “hod kockou” je $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Príklad 1.5. Pri náhodnom experimente “hod mincou, až kým nepadne panna” je $S = \{p, op, oop, ooop, \dots, \perp\}$ (kde \perp je “nekonečno”, teda, že panna nepadne nikdy).

Definícia 1.6. *Základný bod* je jeden výsledok náhodného experimentu, teda prvok $s \in S$.

Definícia 1.7. *Udalosť* alebo *jav* je podmnožina $A \subseteq S$ základného priestoru. Reprezentuje jeden alebo viac výsledkov náhodného experimentu.

Príklad 1.8. Udalosť “na kocke padne párne číslo” reprezentuje množina $A = \{2, 4, 6\}$.

Definícia 1.9. Udalosť \emptyset je *nemožná*, udalosť S je *istá*, a udalosť $\{s\}$ je *elementárna* pre všetky $s \in S$.

Definícia 1.10. Na udalostiach fungujú klasické množinové operácie, ktoré definujeme takto:

$s \in A$	udalosť A obsahuje základný bod $s \in S$
$A = B$	dve udalosti A, B obsahujú rovnaké základné body
$A = \emptyset$	udalosť A neobsahuje žiadne základné body
$\bar{A} = \{s \in S \mid s \notin A\}$	udalosť A nenastane, nastane jej doplnok
$A \cap B$	obe udalosti A aj B nastanú
$A \cup B$	nastane udalosť A alebo B (alebo obe)
$A \subseteq B$	udalosť A implikuje udalosť B

Príklad 1.11. Udalosť “na kocke hodím číslo menšie ako 2” implikuje udalosť “na kocke hodím číslo menšie ako 3”.

Definícia 1.12. *Vzájomne nezlúčiteľné, disjunktné* udalosti sú také udalosti A_1, \dots, A_n , že pre každú dvojicu A_i, A_j (pričom $i \neq j$) platí, že $A_i \cap A_j = \emptyset$.

Príklad 1.13. Udalosti $A = \{1, 2\}$, $B = \{5\}$, $C = \{6\}$, sú vzájomne nezlúčiteľné.

Definícia 1.14. *Úplný systém* udalostí A_1, \dots, A_n je taká postupnosť udalostí A_1, \dots, A_n , že $A_1 \cup \dots \cup A_n = S$

Príklad 1.15. Udalosti $D = \{3, 4, 5, 6\}$, $E = \{1, 2, 3, 4\}$ tvoria úplný systém pre základný priestor $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Definícia 1.16. *Rozklad* základného priestoru je úplný systém vzájomne nezlúčiteľných udalostí.

Príklad 1.17. Pri hode kockou sú elementárne udalosti $\{s\}$ rovné $\{1\}$, $\{2\}$, \dots , $\{6\}$. Postupnosť týchto udalostí je rozkladom základného priestoru S .