

Nauč sa matiku – množiny

Valdemar Švábenský

31. mája 2015



Predslov

Milá čitateľka, milý čitateľ,

do rúk alebo na obrazovku sa Ti dostáva malý učebný text z oblasti množín, ktorý vznikol v rámci projektu Nauč sa matiku. Text je určený primárne pre žiakov a študentov stredných škôl alebo 1. ročníka vysokých škôl, ale tiež pre každého, kto si chce uceliť alebo zopakovať znalosti základnej teórie množín.

Celý dokument je rozdelený do siedmich kapitol (číslovaných 1 až 7), ktoré sú v istých prípadoch rozdelené do podkapitol (napríklad 1.1, 1.2, 1.3). V prípade, že je nejaká podkapitola mierne pokročilá a určená skôr pre vysokoškolákov, je označená hviezdičkou v zátvorkách pred jej názvom, takto: (*). Ďalšie časti, ktoré sú určené pre vysokoškolákov sú označené: *Dôkaz*. Ak si ešte na strednej, potešíš ma, keď si prečítaš aj tieto pokročilé časti, ale ak niečomu z toho fakt nebudeš rozumieť, netráp sa a kľudne to preskoč. Ak si na výške alebo sa v budúcnosti plánuješ venovať matematike, máš zákázané preskočiť čokoľvek! (Srandujem, ale zároveň to myslím vážne – je to pre Tvoje dobro ☺.)

Môj cieľ bol neľahký:

- spísať text matematicky presne, ale zároveň tak jednoducho, ako sa len dá, aby bol pochopiteľný aj pre Teba, ak máš s matematikou problémy;
- nevynechať nič dôležité, ale zároveň byť stručný, aby som Ťa nezahltil;
- vybrať menej tradičné alebo dokonca vtipné príklady a nepôsobiť pri tom hlúpo.

Nakoľko sa mi to podarilo, posúdiš už Ty. Otázky a akákoľvek spätná väzba, či už podakovanie, vyhrážky, oprava chýb, konštruktívna kritika, návrhy na zlepšenie, alebo pozvanie na pivo sú vítané. Kontakt na mňa nájdeš na mojom webe <http://www.naucsamatiku.com>. Pri písaní tohto textu som sa dobre bavil (áno, je to so mnou až tak zlé), preto pevne verím, že sa Ti z neho bude dobre učiť. Držím Ti palce.

Valdemar

P.S. pre vyučujúcich: dúfam, že Vás neurazilo počiatočné tykanie. V texte bola v istých prípadoch definícia pojmu zjednodušená na úkor presnosti. Tento krok, aj keď značne nematematický, autor považuje za dôležitý, ak majú aj menej zdatní čitatelia získať akési základné pochopenie. Pre úplnosť je každá definícia formalizovaná neskôr. Verím, že budete mať pochopenie pre moje občasné zjednodušenia a žarty.

Licencia a právo na použitie

Celý dokument je k dispozícii úplne zdarma pod licenciou Creative Commons [6]. Nikomu a nikdy by ste zaň preto nemali platiť. Text a jeho časti môžete ľubovoľne používať pre *nekomerčné* účely, šíriť v akejkoľvek podobe s odkazom na autora a tiež ľubovoľne upravovať a meniť za podmienok, že uvediete citáciu pôvodného autora, vykonané zmeny a výsledné dielo budete voľne zdieľať pod rovnakou licenciou. Ak máte pocit, že podmienky boli porušené, prosím, kontaktujte ma.

Obsah

1 Úvod	3
1.1 Čo je to množina?	3
1.2 Prázdna množina	4
1.3 Prvky množiny	4
1.4 Kardinalita (veľkosť) množiny	4
2 Vzťahy medzi množinami	5
2.1 Vzťah rovnosti	5
2.2 Vzťah inklúzie (podmnožiny)	6
3 Nekonečné množiny	9
4 Matematický zápis množín	10
5 Množinové operácie	11
5.1 Operácia prieniku množín	11
5.2 Operácia zjednotenia množín	13
5.3 Operácia rozdielu množín	14
5.4 Operácia symetrického rozdielu množín	15
5.5 Operácia doplnku množiny	16
5.6 (*) Operácia karteziánskeho súčinu množín	17
5.7 (*) Potenčná množina	17
5.8 Zhrnutie	18
6 Intervaly	18
6.1 Otvorený interval	18
6.2 Uzavretý interval	19
6.3 Polouzavreté intervaly	19
6.4 Priebežné zhrnutie	20
6.5 Intervaly obsahujúce nekonečno	20
6.6 (*) Hraničné prípady intervalov	21
6.7 Množinové operácie na intervaloch	21
7 Množinové diagramy	22
7.1 Eulerove diagramy	22
7.2 Vennove diagramy	25

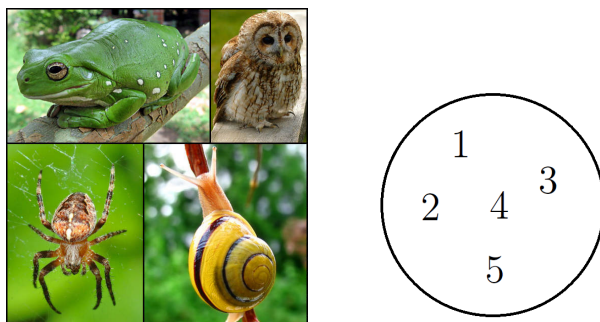
Kapitola 1: Úvod

() Výklad k tejto Kapitole nájdeš vo videu Úvod [1], čas 0:00–2:45.

1.1 Čo je to množina?

Definícia 1.1. *Množina* je skupina prvkov, ktoré majú nejakú vlastnosť alebo spĺňajú nejakú spoločnú podmienku.

Príklad 1.2. Príkladom je množina zvierat [7] alebo množina čísel od 1 do 5.



Značenie 1.3. Množinu obvykle značíme veľkým písmenom abecedy. Prvky množiny zapisujeme do *množinových zátvoriek*. Toto je lavá: { a toto pravá množinová zátvorka: }.

Príklad 1.4. $Z = \{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\}$ je množina s „menom“ Z , ktorá obsahuje prvky „žaba“, „sova“, „pavúk“ a „slimák“.

Tvrdenie 1.5. *Množinu môžeme zadať slovným popisom, napríklad nejakou podmienkou, ktorú spĺňajú všetky prvky množiny.*

Príklad 1.6. A je množina všetkých ľudí, ktorí bývajú na Slovensku. Podmienkou v tomto prípade je, že ľudia z danej množiny bývajú na Slovensku.

Príklad 1.7. B je množina celých čísel menších ako 10. Podmienkou v tomto prípade je, že čísla z danej množiny sú menšie ako 10.

Tvrdenie 1.8. *Množinu môžeme zadať vymenovaním prvkov.*

Príklad 1.9. $R = \{\text{ja, tato, mama, sestra}\}$.

Poznámka. Ak by sme chceli vyzerat veľmi múdro, predošlé Tvrdenie 1.8 môžeme preformulovať a povedať, že „množina je svojimi prvkami jednoznačne určená“. To prakticky znamená, že:

- akýkoľvek zoznam prvkov, ktorý si vypíšeme, zadáva množinu;
- na to, aby sme zadali množinu, nepotrebuje nič iné, ako vypísať jej prvky.

1.2 Prázdna množina

Definícia 1.10. *Prázdna množina* je množina, ktorá nemá žiadny prvok.

Značenie 1.11. Prázdnu množinu značí symbol $\emptyset$ alebo prázdne množinové zátvorky: $\{\}$.

Príklad 1.12. $\emptyset$ je množina všetkých ľudí, ktorí leteli do vesmíru v roku 1614.

Poznámka. Pri značení prázdnej množiny je dôležité nemiešať zápisy $\emptyset$ a $\{\}$. Treba si zvoliť len jeden z nich. Napríklad zápis $\{\emptyset\}$ totiž značí množinu, ktorá nie je prázdna, ale obsahuje jediný prvok, a to prázdnu množinu. Toto už vyzerá ako nejaká matematická mágia, ale stačí sa na to dívať takto: množinové zátvorky značia množinu a to, čo je medzi nimi, sú prvky danej množiny.

1.3 Prvky množiny

Značenie 1.13. Ak prvok *patrí* do množiny, používame symbol $\in$. Zápis $x \in A$ hovorí, že prvok x patrí do množiny A . Ak prvok *nepatrí* do množiny, používame symbol $\notin$.

Príklad 1.14. $\text{žaba} \in Z$; $\text{vlk} \notin Z$, kde množina Z je definovaná v Príklade 1.4.

Príklad 1.15. $1 \in \{1, 2, 3\}$; $7 \notin \{1, 2, 3\}$.

Príklad 1.16. $1 \notin \emptyset$; $\emptyset \in \{\emptyset\}$.

Príklad 1.17. $\text{System of a Down} \in K$, kde K je množina autorovych obľúbených kapiel.

Poznámka. (📺) Ďalšie príklady nájdeš vo videu Množinový kalkul [5], čas 0:47–2:06.

Tvrdenie 1.18. *V množinách neuvažujeme (ignorujeme) duplicitné prvky.*

Príklad 1.19. Množiny $\{\text{žaba}, \text{sova}, \text{pavúk}, \text{slimák}\}$ a $\{\text{žaba}, \text{žaba}, \text{žaba}, \text{sova}, \text{sova}, \text{pavúk}, \text{slimák}, \text{slimák}\}$ považujeme za rovnaké.

Tvrdenie 1.20. *V množinách nezáleží na poradí prvkov.*

Príklad 1.21. Množiny $\{\text{žaba}, \text{sova}, \text{pavúk}, \text{slimák}\}$ a $\{\text{sova}, \text{žaba}, \text{pavúk}, \text{slimák}\}$ považujeme za rovnaké.

1.4 Kardinalita (veľkosť) množiny

Definícia 1.22. *Kardinalita* (veľkosť) množiny je počet jej prvkov.

Značenie 1.23. Kardinalitu množiny značíme medzi dve zvislé čiary.

Príklad 1.24. $|Z| = 4$, kde Z je definovaná v Príklade 1.4.

Príklad 1.25. $|\{a, b, c\}| = 3$.

Príklad 1.26. $|\emptyset| = 0$.

Príklad 1.27. $|S| = 1$, kde $S = \{\text{Barbora}\}$ je množina autorovych súrodencov.

Kapitola 2: Vzťahy medzi množinami

() Výklad k tejto Kapitole nájdeš vo videu Úvod [1], čas 2:45–5:00.

2.1 Vzťah rovnosti

Definícia 2.1. Množina A je rovná množine B , práve keď platí, že obe množiny majú rovnaké prvky (a žiadna z množín nemá nejaký prvok navyše oproti tej druhej).

Značenie 2.2. Vzťah rovnosti množín značíme klasicky symbolom $=$.

Príklad 2.3. $\{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\}$.

Príklad 2.4. $\emptyset = \emptyset = \{\}; \emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Poznámka. Pripomeňme si Tvrdenia 1.18 a 1.20. V množinách nezáleží na duplicitných prvkoch ani na poradí prvkov.

Príklad 2.5. $\{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\} = \{\text{žaba, žaba, žaba, sova, sova, pavúk, slimák}\}$.

Príklad 2.6. $\{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\} = \{\text{sova, žaba, pavúk, slimák}\}$.

Poznámka. Rovnosť množín formálne definujeme nasledovne:

$$A = B \stackrel{\text{def.}}{\iff} \forall x: (x \in A \iff x \in B).$$

Čítame: „Množina A je rovná množine B , práve keď pre každé x platí: x je prvkom množiny A , práve keď x je prvkom množiny B .“

Príklad 2.7. $\{1, 2, 2, 4, 5, 8, 8, 9, 9, 9\} = \{5, 2, 8, 4, 9, 1\} \neq \{5, 2, 8, 4, 9, 2\}$.

Poznámka. Viac príkladov na rovnosť množín už snáď nie je treba. Konkrétne príklady ale nie sú všetko. My matematici často hľadáme nejaké vlastnosti, ktoré globálne popisujú nejaký jav. Skúsme teraz nájsť nejakú takú vlastnosť rovnosti množín, ktorá hovorí niečo veľmi všeobecné, ale zároveň sa dá aplikovať na hocikaký konkrétny príklad, aký si zmyslíš.

Veta 2.8. Každá množina sa rovná sama sebe. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A = A$.

Poznámka. Toto je príklad takej všeobecnej vlastnosti. Skús si za A dosadiť ľubovoľnú množinu, ktorá Ti napadne a uvidíš, že vždy platí: $A = A$.

Možno si hovoríš, že na Teba skúšam nejaký matematický trik. Načo by sme rozmýšľali nad tým, či sa množina rovná sama sebe, veď to je predsa jasné, no nie? Avšak, rozmýšľať nad tým má zmysel. Výrok „každá množina sa rovná sama sebe“ je príkladom tvrdenia, ktoré môžeme vysloviť o rovnosti množín. Takéto tvrdenie sa v matematike nazýva *veta*.

Keď matematik vysloví nejakú vetu, musí presvedčiť ostatných (v tomto prípade Teba, čitateľa), že si ju len tak nevymyslel, ale hovorí pravdu, ktorú vie zdôvodniť. Matematické zdôvodnenie, že nejaká veta skutočne platí, nazývame *dôkaz*.

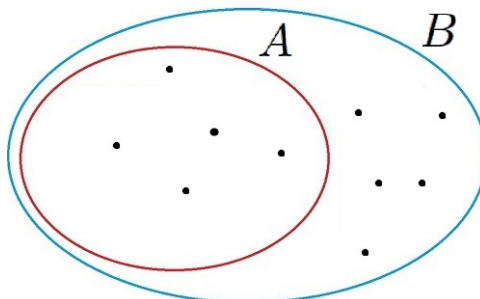
Ak matematik tvrdí niečo, čo je skutočne nad slnko jasné a verí, že je to zrejmé aj pre Teba, čitateľa, napíše: „*Dôkaz*: Veta je zrejmá“ a na koniec riadka nakreslí štvorček, aby veľkolepo ukončil svoju myšlienku. Vyskúšajme si to. (Ozajstný príklad dôkazu si ukážeme v závere nasledujúcej Podkapitoly 2.2.)

Dôkaz. Veta 2.8 je zrejmá. □

2.2 Vzťah inklúzie (podmnožiny)

Definícia 2.9. Množina A je *podmnožinou* množiny B , práve keď platí, že ak nejaký prvok patrí do množiny A , tak patrí aj do množiny B .

Poznámka. Inak povedané, každý prvok množiny A musí byť aj prvkom množiny B .



Značenie 2.10. Vzťah podmnožiny značíme symbolom $\subseteq$.

Príklad 2.11. $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$. Všimni si, že každý prvok prvej množiny je aj prvkom druhej množiny.

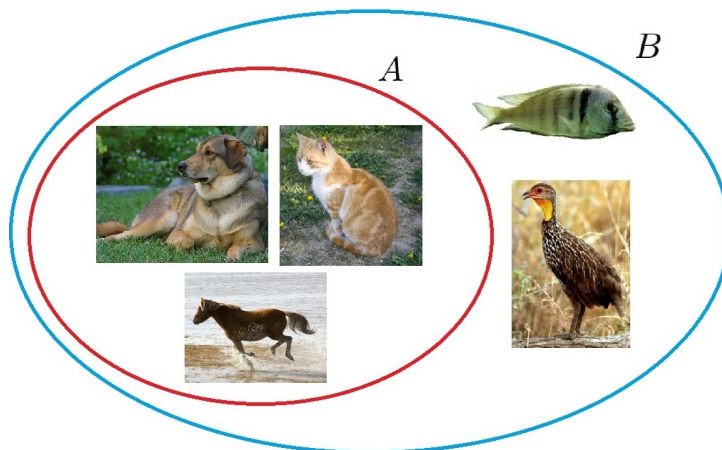
Príklad 2.12. $\{a, b, c\} \subseteq \{e, a, a, c, c, d, b\}$.

Poznámka. Definíciu podmnožiny môžeme formálne zapísať nasledovne:

$$A \subseteq B \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall x: (x \in A \implies x \in B).$$

Čítame: „Množina A je podmnožinou množiny B , práve keď pre každé x platí: ak je x prvkom množiny A , tak je x prvkom množiny B .“

Príklad 2.13. Množina štvornohých zvierat $A = \{\text{pes, mačka, kôň}\}$ je podmnožinou množiny zvierat $B = \{\text{pes, mačka, kôň, ryba, vták}\}$. (Rád sa hrám s obrázkami.)



Definícia 2.14. Množina B je *nadmnožinou* množiny A , práve keď množina A je podmnožinou množiny B .

Poznámka. Toto nie je žiadna veda: vzťah podmnožiny proste čítame z opačnej strany.

Značenie 2.15. Vzťah nadmnožiny značíme symbolom $\supseteq$.

Príklad 2.16. $\{1, 2, 3\} \supseteq \{1, 2\}$.

Príklad 2.17. $\{e, a, a, c, c, d, b\} \supseteq \{a, b, c\}$.

Príklad 2.18. $\{\text{pes, mačka, kôň, ryba, vták}\} \supseteq \{\text{pes, mačka, kôň}\}$.

Poznámka. Nadmnožiny sú jednoduché. Častejšie sa ale stretneme s podmnožinami.

Príklad 2.19. Pozrime sa teraz na mierne chytákový príklad: je množina $\{5, 2, 8\}$ podmnožinou množiny $\{5, 2, 8\}$? Odpoveďou je, že áno, teda $\{5, 2, 8\} \subseteq \{5, 2, 8\}$. Tieto dve množiny sú si rovné, ale všimni si, že zároveň spĺňajú definíciu podmnožiny – každý prvok množiny vľavo od znaku $\subseteq$ je aj prvkom množiny vpravo od znaku $\subseteq$.

Poznámka. Rovnosť množín (pozri Podkapitolu 2.1) môžeme definovať tiež nasledovne:

$$A = B \stackrel{\text{def.}}{\iff} (A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A).$$

Čítame: „Množina A je rovná množine B , práve keď A je podmnožinou množiny B a zároveň B je podmnožinou množiny A .“

Definícia 2.20. Množina A je *vlastnou podmnožinou* množiny B , práve keď platí, že A je podmnožinou B a zároveň A sa nerovná B .

Poznámka. Pojem vlastnej podmnožiny používame, keď chceme ukázať vzťah podmnožiny, ale zároveň chceme zdôrazniť, že sa dané dve množiny nerovnajú.

Značenie 2.21. Vzťah vlastnej podmnožiny značíme symbolom $\subset$.

Príklad 2.22. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$. Všimni si, že každý prvok prvej množiny je aj v druhej množine a tieto dve množiny sa nerovnajú.

Príklad 2.23. $\{a, b, c\} \subset \{e, a, a, c, c, d, b\}$.

Poznámka. Definíciu vlastnej podmnožiny môžeme formálne zapísať nasledovne:

$$A \subset B \stackrel{\text{def.}}{\iff} (A \subseteq B) \wedge (A \neq B).$$

Príklad 2.24. $\{\text{pes, mačka, kôň}\} \subset \{\text{pes, mačka, kôň, ryba, vták}\}$. V tomto príklade (a predošlých dvoch) sa jedná o podmnožinu a zároveň o vlastnú podmnožinu.

Príklad 2.25. $\{5, 2, 8\} \not\subset \{5, 2, 8\}$. V tomto príklade sa jedná o podmnožinu, ale nie o vlastnú podmnožinu.

Definícia 2.26. Množina B je *vlastnou nadmnožinou* množiny A , práve keď platí, že množina A je vlastnou podmnožinou množiny B .

Poznámka. Opäť žiadna veda, len pohľad z druhej strany.

Príklad 2.27. $\{+, -, \cdot, \div\} \supset \{+, \cdot\}$.

Úloha pre Teba. Skús si prejsť predošlé príklady a postupne pomyselne nahraď symboly $\subset, \subseteq, =, \supseteq, \supset$ symbolmi $<, \leq, =, \geq, >$, ktoré používame pre porovnávanie čísel. Vidíš nejakú príbuznosť?

Poznámka. (YouTube) Ďalšie príklady nájdeš vo videu Množinový kalkul [5], čas 2:06–5:42.

Veta 2.28. Každá množina je podmnožinou sama seba. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \subseteq A$.

Poznámka. Prvá matematická veta, s ktorou sme sa stretli vyššie, bola Veta 2.8. Matematické vety sa na hodinách matematiky obvykle prezentujú ako poučky, napríklad: „naučte sa naspamäť, že $A \subseteq A$, lebo to platí“. Avšak, vety sú všeličo, len nie poučky.

Za prvé, v matematike sa nestačí učiť veci len naspamäť. Za druhé, nestačí veriť, že niečo platí, ale treba sa presvedčiť, že tomu tak skutočne je. Ja Ti môžem tvrdiť, že $A \subseteq A$. Ty mi môžeš veriť, ale nemusíš. Preto je mojou úlohou *dokázať* Ti, že túto vetu som si nevyucul z prsta, ale skutočne platí na základe niečoho, čo sme sa naučili vyššie. Za tretie, keď pochopíš dôkaz, prečo nejaká veta platí, ľahšie si ju zapamätáš. Zrazu sa ju nebudeš musieť učiť naspamäť, ale budeš si ju vedieť odvodiť.

Podme sa teda vrhnúť na dôkaz Vety 2.28.

Dôkaz. Z Definície 2.9 podmnožiny vieme, že: „ $A \subseteq B$, práve keď platí, že ak nejaký prvok patrí do množiny A , tak patrí aj do množiny B .“ (V matematických dôkazoch sa často odkazujeme na predošlé definície alebo vety).

Chceme dokázať, že $A \subseteq A$. Dosadíme si teda do tejto definície symbol A všade tam, kde je symbol B . Dostávame: „ $A \subseteq A$, práve keď platí, že ak nejaký prvok patrí do množiny A , tak patrí aj do množiny A .“

Toto vyzerá zase ako nejaký matematický trik, ale je jasné, že „ak nejaký prvok patrí do množiny A , tak patrí aj do množiny A “. Použili sme definíciu, ktorú sme sa naučili vyššie, trochu sme sa s ňou pohrali a zrazu sme dospeli k niečomu zrejmemu. Toto je častý postup pri mnohých dôkazoch.

Zhrňme si to. Máme: „ $A \subseteq A$, práve keď platí, že ak nejaký prvok patrí do množiny A , tak patrí aj do množiny A .“ Celý tento výrok považujeme za pravdivý, pretože vychádza z definície. Tento výrok je logická ekvivalencia tvaru „ X , práve keď platí, že Y .“ Zistili sme, že druhá časť ekvivalencie (Y), teda „... ak nejaký prvok patrí do množiny A , tak patrí aj do množiny A “ je pravdivá. Teda máme: „ $A \subseteq A$, práve keď platí, že *pravdivé tvrdenie*.“ Ak je druhá časť ekvivalencie pravdivá a zároveň celá ekvivalencia je pravdivá (pretože je to definícia), tak je pravdivá aj prvá časť. Preto je pravda, že $A \subseteq A$. Tým sme dokázali Vetu 2.28. Hurá! Dúfam, že Ťa to veľmi neunavilo. A nezabudnime na štvorček. $\square$

Veta 2.29. Prázdna množina je podmnožinou každej množiny. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $\emptyset \subseteq A$.

Dôkaz. Opäť začneme z Definície 2.9 podmnožiny. Vieme, že: „ $A \subseteq B$, práve keď platí, že ak nejaký prvok patrí do množiny A , tak patrí aj do množiny B .“

Chceme dokázať, že $\emptyset \subseteq A$. Dosadíme si teda do tejto definície symbol $\emptyset$ všade tam, kde je A a symbol A všade tam, kde je B . Dostávame: „ $\emptyset \subseteq A$, práve keď platí, že ak nejaký prvok patrí do množiny $\emptyset$, tak patrí aj do množiny A .“

Toto je opäť logická ekvivalencia. Preskúmame jej druhú časť, teda: „... ak nejaký prvok patrí do množiny $\emptyset$, tak patrí aj do množiny A .“ Toto je pre zmenu logická implikácia. Jej predpoklad je: „ak nejaký prvok patrí do množiny $\emptyset$ “. Keďže do množiny $\emptyset$ nepatrí žiadny prvok, predpoklad je nepravdivý. Ak je predpoklad implikácie nepravdivý, potom celá implikácia je pravdivá. Teda celá druhá časť ekvivalencie je pravdivá. Dostávame: „ $\emptyset \subseteq A$, práve keď platí, že *pravdivé tvrdenie*.“ Druhá časť ekvivalencie je pravdivá a zároveň celá ekvivalencia je pravdivá, preto je pravdivá aj prvá časť. Platí, že $\emptyset \subseteq A$. $\square$

Veta 2.30. *Prázdná množina je vlastnou podmnožinou každej neprázdnej množiny. Teda pre ľubovoľnú neprázdnu množinu A platí: $\emptyset \subset A$.*

Dôkaz. Opäť vyjdeme z definície, tentokrát z Definície 2.20 vlastnej podmnožiny. Tá hovorí: „ $A \subset B$, práve keď platí, že A je podmnožinou B a zároveň A sa nerovná B .“

Chceme dokázať, že ak $A \neq \emptyset$ (A musí byť neprázdna), tak $\emptyset \subset A$. Dosadíme si teda do našej definície symbol $\emptyset$ všade tam, kde je A a symbol A všade tam, kde je B . Dostávame: „ $\emptyset \subset A$, práve keď platí, že $\emptyset$ je podmnožinou A a zároveň $\emptyset$ sa nerovná A .“

Pozrime sa na druhú časť ekvivalencie: „... $\emptyset$ je podmnožinou A a zároveň $\emptyset$ sa nerovná A .“ Toto je logická konjunkcia (všimni si spojku *a zároveň*), ktorá spája dva výroky:

1. $\emptyset$ je podmnožinou A (symbolicky: $\emptyset \subseteq A$);
2. $\emptyset$ sa nerovná A (symbolicky: $\emptyset \neq A$).

Prvá časť konjunkcie je vlastne Veta 2.29, o ktorej už vieme, že je pravdivá. (V matematike často využívame vopred dokázané vety.) Druhá časť konjunkcie je náš predpoklad, že A musí byť neprázdna.

Oba výroky v konjunkcii sú pravdivé, teda celá konjunkcia je pravdivá. Teda je pravdivá druhá časť našej ekvivalencie. Celá ekvivalencia je tiež pravdivá (lebo vychádza z definície), takže musí byť pravdivá aj jej prvá časť: $\emptyset \subset A$. $\square$

Úloha pre Teba. Neuč sa vety uvedené vyššie naspamäť ako básničku, ale skús si zdôvodniť, prečo vlastne platia. Prečítaj si dôkazy skutočne pomaly a presvedč sa, že chápeš každé slovo, kým sa posunieš ďalej.

Okrem toho, obvykle neexistuje len jediný spôsob, ako niečo dokázať. Experimentuj sám/sama. Za A si dosad' vlastné príklady množín.

Kapitola 3: Nekonečné množiny

() Výklad k tejto Kapitole nájdeš vo videu Úvod [1], čas 5:00–5:36.

() Pre záujemcov o problematiku je tu pokročilejšie video Nekonečné množiny [4].

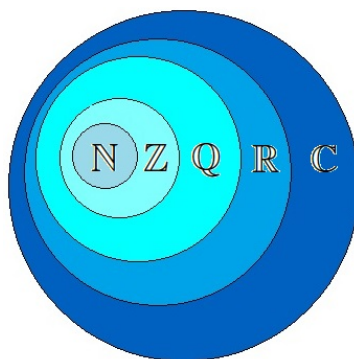
Doteraz sme pracovali len s konečnými množinami, teda s takými, ktoré majú konečný počet prvkov.

Definícia 3.1. Nekonečné množiny sú množiny, ktoré majú nekonečný počet prvkov.

Príklad 3.2. Medzi dôležité nekonečné množiny patria:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$: množina prirodzených čísel.
- $\mathbb{Z} = \{\dots, 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$: množina celých čísel.
- $\mathbb{Q}$: množina racionálnych čísel, teda čísel, ktoré sa dajú zapísať zlomkom s celočíselným číslom čitateľom a celočíselným menovateľom, pričom menovateľ je nenulový.
- $\mathbb{R}$: množina reálnych čísel, teda všetkých čísel, ktoré sú hodnotou na číselnej osi.
- $\mathbb{C}$: množina komplexných čísel, teda čísel tvaru $a + bi$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ sú reálne čísla.

Veta 3.3. Množiny z Príkladu 3.2 sú vo vzťahu vlastnej inklúzie: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.



Dôkaz. Úloha pre Teba. □

Kapitola 4: Matematický zápis množín

() Výklad k tejto Kapitole nájdeš vo videu Úvod [1], čas 5:36–6:33.

Doteraz sme obvykle pracovali s množinami zadanými vymenovaním prvkov. Dost často ale môžeme medzi prvkami množiny zachytiť nejakú spoločnú vlastnosť, ktorú môžeme zapísať pomocou matematických symbolov.

Predstav si množinu zadanú slovným popisom: A je množina všetkých takých prvkov, ktoré majú štyri nohy (napríklad: pes, mačka, stolička, ...). Ako takúto množinu zapísať pomocou matematických symbolov?

Príklad 4.1. $A = \{x \mid x \text{ má 4 nohy}\}$.

Tento zápis čítame: „ A je množina všetkých takých prvkov x , kde x má 4 nohy“. Predstav si, že za x postupne dosadzujeme rôzne prvky a zakaždým rozhodneme, či daný prvok má alebo nemá štyri nohy.

- Za x skúsime dosadiť „pes“. Spýtame sa: „má pes 4 nohy?“ Odpoveďou je, že áno, preto pes patrí do množiny A ($\text{pes} \in A$).
- Za x skúsime dosadiť „stolička“. Spýtame sa: „má stolička 4 nohy?“ Odpoveďou je, že áno, preto stolička patrí do množiny A ($\text{stolička} \in A$).
- Za x skúsime dosadiť „bublina“. Spýtame sa: „má bublina 4 nohy?“ Odpoveďou je, že nie, preto bublina nepatrí do množiny A ($\text{bublina} \notin A$).

Toto môže na prvý pohľad vyzeráť trochu komplikovane. Skúsme preto ďalší príklad.

Príklad 4.2. $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 6\}$.

Tento zápis čítame: „ B je množina všetkých takých prvkov n , ktoré patria do množiny $\mathbb{N}$ prirodzených čísel, pričom n je menšie ako 6“. Predstav si, že za n postupne dosadzujeme rôzne prirodzené čísla a zakaždým rozhodneme, či dané číslo je alebo nie je menšie ako 6.

- Za n skúsime dosadiť 1. Spýtame sa: „je 1 menšie ako 6?“ Odpoveďou je, že áno, preto 1 patrí do množiny B ($1 \in B$).

- Za n skúsime dosadiť 4. Spýtame sa: „je 4 menšie ako 6?“ Odpoveďou je, že áno, preto 4 patrí do množiny B ($4 \in B$).
- Za n skúsime dosadiť 8. Spýtame sa: „je 8 menšie ako 6?“ Odpoveďou je, že nie, preto 8 nepatrí do množiny B ($8 \notin B$).

Začína to dávať zmysel? Vieme, že n musí patriť do množiny $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$. Zároveň vieme, že $n < 6$. Ak by sme si skúšali dosadiť rôzne n , dospeli by sme k záveru, že vyhovujú jedine čísla 1, 2, 3, 4, 5.

Inak povedané, $B = \{n \in \mathbb{N} \mid n < 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Hurá, rozlúštili sme tento „zašifrovaný“ matematický zápis a našli sme všetky prvky množiny B !

Príklad 4.3. $C = \{\text{zvierá} \mid \text{meno prvku „zvierá“ začína na písmeno } p\}$.

Čo teraz? Táto množina bude obsahovať určite mnoho prvkov, ale bude konečná. Pre ukážku: $C = \{\text{pásovec, pelikán, pes, pinka, puma, pytón, \dots}\}$.

Príklad 4.4. $D = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \text{ je párne}\} = \{\dots, -4, -2, 0, 2, 4, \dots\}$.

Značenie 4.5. Zvislá čiara: | sa v súvislosti s množinami môže čítať ako „kde“. Napravo od tejto čiary nasleduje logická podmienka, ktorá upresňuje zápis naľavo od tejto čiary.

Príklad 4.6. $E = \{n \in \mathbb{N} \mid n \text{ je násobkom čísla } 5\} = \{5, 10, 15, 20, \dots\}$.

Príklad 4.7. $F = \{p \in \mathbb{N} \mid p \text{ je prvočíslo}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, \dots\}$.

Príklad 4.8. $G = \{n \in \mathbb{N} \mid n^2 < 10\}$.

Teraz hľadáme také prirodzené čísla, ktoré sú po umocnení na druhú menšie ako 10. Postupne umocňujeme prirodzené čísla a dostávame mocniny: 1, 4, 9, 16, 25, ... Menšie ako 10 sú 1, 4 a 9. My ale hľadáme pôvodné čísla n , ktoré sme umocňovali, aby sme dostali n^2 . Výsledkom je teda množina obsahujúca čísla 1, 2, 3. Preto $G = \{1, 2, 3\}$.

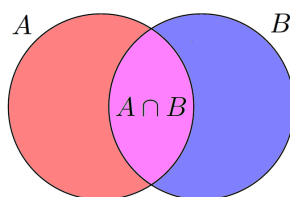
Kapitola 5: Množinové operácie

() Výklad k tejto Kapitole nájdeš vo videu Množinové operácie a intervaly [2], čas 0:00–6:50.

5.1 Operácia prieniku množín

Definícia 5.1. Prienik dvoch množín A , B je množina, ktorá obsahuje len tie prvky, ktoré sú v oboch množinách A , B naraz.

Značenie 5.2. Operáciu prieniku množín značíme symbolom $\cap$.



Príklad 5.3. $\{1, 2, 3\} \cap \{2, 3, 4, 5\} = \{2, 3\}$.

Príklad 5.4. $\{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\} \cap \{\text{ryba, pes, mačka, sova}\} = \{\text{sova}\}$.

Príklad 5.5. $\text{morské živočíchy} \cap \text{cicavce} = \{\text{veľryby, delfíny, tulene, mrože, \dots}\}$.

Poznámka. Prienik množín formálne definujeme nasledovne:

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}.$$

Čítame: „Prienik množín A, B sa rovná množine takých prvkov x , že x je prvkom množiny A a zároveň x je prvkom množiny B .“

Príklad 5.6. $\{1, 2, 4, 5, 8, 9\} \cap \{5, 2, 8, 4, 9, 1\} = \{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$.

Definícia 5.7. Dve množiny A, B sú *disjunktné*, ak ich prienik je prázdna množina.

Príklad 5.8. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{x, y\}$ sú disjunktné, lebo $A \cap B = \emptyset$.

Veta 5.9. *Prienik množín je komutatívny. Teda pre dve ľubovoľné (aj prázdne) množiny A, B platí: $A \cap B = B \cap A$.*

Poznámka. Keď sa pozrieme na diagram pri Definícii 5.1 prieniku, intuitívne vidíme, že táto veta platí. Nezáleží na tom, z ktorej strany postupujeme, výsledok prieniku je vždy zrejme rovnaký. Pri dôkaze ale potrebujeme vyjsť z definície.

Dôkaz. Vyjdeme z Definície 5.1 prieniku: „ $A \cap B$ je množina, ktorá obsahuje len tie prvky, ktoré sú v oboch množinách A, B naraz.“ Z druhej strany: „ $B \cap A$ je množina, ktorá obsahuje len tie prvky, ktoré sú v oboch množinách B, A naraz.“ Tieto dve množiny sú zjavne rovnaké – je jedno, či uvažujeme, že prvok je naraz v A a B alebo v B a A . $\square$

Veta 5.10. *Prienik ľubovoľnej množiny s prázdnu množinou je prázdna množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \cap \emptyset = \emptyset$.*

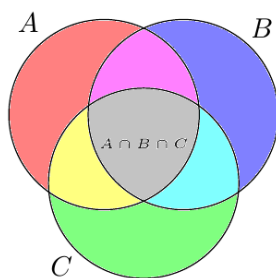
Dôkaz. Vyjdeme z Definície 5.1 prieniku: „ $A \cap B$ je množina, ktorá obsahuje len tie prvky, ktoré sú v oboch množinách A, B naraz.“ Chceme zistiť, čomu sa rovná $A \cap \emptyset$. Dosadíme si do našej definície symbol $\emptyset$ namiesto B . Dostávame: „ $A \cap \emptyset$ je množina, ktorá obsahuje len tie prvky, ktoré sú v oboch množinách $A, \emptyset$ naraz.“ Keďže $\emptyset$ nemá žiadny prvok, naraz v A a v $\emptyset$ nemôže byť nič, preto výsledkom je prázdna množina. $\square$

Veta 5.11. *Prienik množiny samej so sebou je pôvodná množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \cap A = A$.*

Dôkaz. Veta je zrejmalá. $\square$

Poznámka. Prienik množín môžeme zovšeobecniť z dvoch na tri, štyri, ... množiny. Skúsme si ilustrovať, ako by vyzeral prienik troch množín.

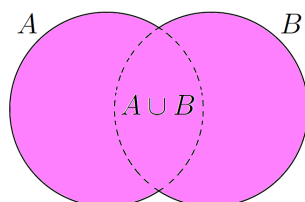
Definícia 5.12. Prienik troch množín A, B, C je množina $A \cap B \cap C$, ktorá obsahuje len tie prvky, ktoré sú vo všetkých troch množinách A, B, C naraz.



5.2 Operácia zjednotenia množín

Definícia 5.13. Zjednotenie dvoch množín A, B je množina, ktorá obsahuje všetky prvky z oboch množín A, B dohromady.

Značenie 5.14. Operáciu zjednotenia množín značíme symbolom $\cup$.



Príklad 5.15. $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Príklad 5.16. $\{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\} \cup \{\text{ryba, pes, mačka, sova}\} = \{\text{žaba, sova, pavúk, slimák, ryba, pes, mačka}\}$.

Príklad 5.17. $\text{Česko} \cup \text{Slovensko} = \text{Československo}$.

Poznámka. Zjednotenie množín formálne definujeme nasledovne:

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}.$$

Čítame: „Zjednotenie množín A, B sa rovná množine takých prvkov x , že x je prvkom množiny A alebo x je prvkom množiny B .“ Pamätaj na to, že pri logickej disjunkcii môže prvok x patriť do oboch množín A, B zároveň.

Príklad 5.18. $\{a, b, c, d\} \cup \{x, y\} = \{a, b, c, d, x, y\}$.

Príklad 5.19. $\{1, 2, 4, 5, 8, 9\} \cup \{5, 2, 8, 4, 9, 1\} = \{1, 2, 4, 5, 8, 9\}$.

Veta 5.20. Zjednotenie množín je komutatívne. Teda pre dve ľubovoľné (aj prázdne) množiny A, B platí: $A \cup B = B \cup A$.

Dôkaz. Analogicky ako dôkaz Vety 5.9. □

Veta 5.21. Ak ľubovoľnú množinu zjednotíme s prázdnu množinou, výsledkom je pôvodná množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \cup \emptyset = A$.

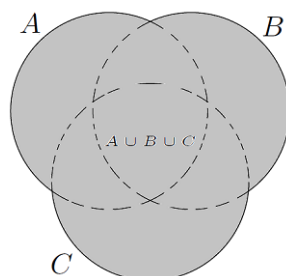
Dôkaz. Vyjdeme z Definície 5.13 zjednotenia: „ $A \cup B$ je množina, ktorá obsahuje všetky prvky z oboch množín A, B dohromady.“ Chceme zistiť, čomu sa rovná $A \cup \emptyset$. Dosadíme si do našej definície symbol $\emptyset$ namiesto B . Dostávame: „ $A \cup \emptyset$ je množina, ktorá obsahuje všetky prvky z oboch množín $A, \emptyset$ dohromady.“ Keďže $\emptyset$ nemá žiadny prvok, k množine A nepridáme nič, ale jej pôvodné prvky tam ostanú. Preto výsledkom je množina A . □

Veta 5.22. Zjednotenie množiny samej so sebou je pôvodná množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \cup A = A$.

Dôkaz. Veta je zrejmá. □

Poznámka. Zjednotenie množín môžeme zovšeobecniť z dvoch na tri, štyri, ... množiny. Skúsme si ilustrovať, ako by vyzeralo zjednotenie troch množín.

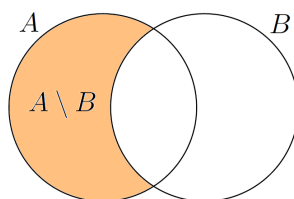
Definícia 5.23. Zjednotenie troch množín A, B, C je množina $A \cup B \cup C$, ktorá obsahuje všetky prvky zo všetkých troch množín A, B, C dohromady.



5.3 Operácia rozdielu množín

Definícia 5.24. Rozdiel dvoch množín A, B (v tomto poradí, teda A mínus B) je množina, ktorá obsahuje len tie prvky, ktoré patria do množiny A , ale nepatria do množiny B .

Značenie 5.25. Operáciu rozdielu množín značíme symbolom $\setminus$.



Príklad 5.26. $\{1, 2, 3\} \setminus \{2, 3, 4, 5\} = \{1\}$. V opačnom poradí $\{2, 3, 4, 5\} \setminus \{1, 2, 3\} = \{4, 5\}$.

Príklad 5.27. $\{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\} \setminus \{\text{ryba, pes, mačka, sova}\} = \{\text{žaba, pavúk, slimák}\}$. V opačnom poradí $\{\text{ryba, pes, mačka, sova}\} \setminus \{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\} = \{\text{ryba, pes, mačka}\}$.

Príklad 5.28. $\text{Južná Amerika} \setminus \text{Krajiny s oficiálnym jazykom španielčina} = \{\text{Brazília, Guyana, Surinam}\}$.

Poznámka. Rozdiel množín formálne definujeme nasledovne:

$$A \setminus B := \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}.$$

Čítame: „Rozdiel množín A, B sa rovná množine takých prvkov x , že x je prvkom množiny A a zároveň x nie je prvkom množiny B .“

Príklad 5.29. $\{a, b, c\} \setminus \{x, y\} = \{a, b, c\}$. V opačnom poradí $\{x, y\} \setminus \{a, b, c\} = \{x, y\}$.

Príklad 5.30. $\{1, 2, 4, 5, 8, 9\} \setminus \{5, 2, 8, 4, 9, 1\} = \emptyset$. V opačnom poradí $\{5, 2, 8, 4, 9, 1\} \setminus \{1, 2, 4, 5, 8, 9\} = \emptyset$.

Poznámka. Rozdiel množín nie je komutatívny. Záleží v ňom na poradí množín.

Veta 5.31. Keď od ľubovoľnej množiny odpočítame prázdnu množinu, výsledkom je pôvodná množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \setminus \emptyset = A$.

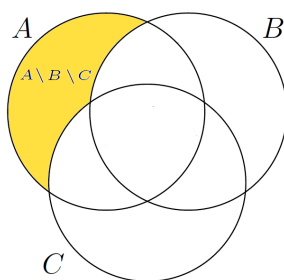
Dôkaz. Vyjdeme z Definície 5.24 rozdielu. Predstavíme si, že od prvkov množiny A odoberieme všetky prvky množiny $\emptyset$. To znamená, že od prvkov množiny A neodoberieme nič. Preto sa množina A nezmení. $\square$

Veta 5.32. Rozdiel množiny samej so sebou je prázdna množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \setminus A = \emptyset$.

Dôkaz. Predstavíme si, že od prvkov množiny A odoberieme všetky prvky množiny A . To znamená, že od prvkov množiny A odoberieme všetko. Preto ostane len prázdna množina. $\square$

Poznámka. Rozdiel množín môžeme zovšeobecniť z dvoch na tri, štyri, ... množiny. Skúsme si ilustrovať, ako by vyzeral rozdiel troch množín.

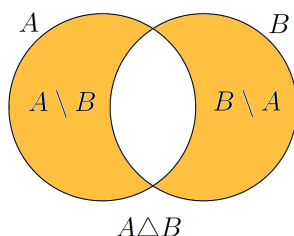
Definícia 5.33. Rozdiel troch množín $A \setminus B \setminus C$ je množina, ktorá obsahuje len tie prvky, ktoré patria do množiny A , ale nepatria do množiny B ani do množiny C .



5.4 Operácia symetrického rozdielu množín

Definícia 5.34. Symetrický rozdiel dvoch množín A, B je množina, ktorá je zjednotením rozdielu množín A, B s rozdielom množín B, A .

Značenie 5.35. Operáciu symetrického rozdielu množín značíme symbolom Δ .



Príklad 5.36. $\{1, 2, 3\} \Delta \{2, 3, 4, 5\} = \{1, 4, 5\}$.

Príklad 5.37. $\{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\} \Delta \{\text{ryba, pes, mačka, sova}\} = \{\text{žaba, pavúk, slimák, ryba, pes, mačka}\}$.

Príklad 5.38. $\{a, b, c\} \triangle \{x, y\} = \{a, b, c, x, y\}$.

Poznámka. Symetrický rozdiel množín formálne definujeme nasledovne:

$$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

Čítame: „Symetrický rozdiel množín A , B sa rovná zjednoteniu množín $A \setminus B$ a $B \setminus A$.“

Príklad 5.39. $\{10, 11, 20, 21\} \triangle \{9, 10, 11, 12, 13\} = \{9, 12, 13, 20, 21\}$.

Príklad 5.40. $\{1, 2, 4, 5, 8, 9\} \triangle \{5, 2, 8, 4, 9, 1\} = \emptyset$.

Veta 5.41. Symetrický rozdiel množín je komutatívny. Teda pre dve ľubovoľné (aj prázdne) množiny A , B platí: $A \triangle B = B \triangle A$.

Veta 5.42. Symetrický rozdiel ľubovoľnej množiny a prázdnej množiny je pôvodná množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \triangle \emptyset = A$.

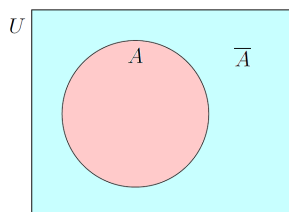
Veta 5.43. Symetrický rozdiel množiny samej so sebou je prázdna množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \triangle A = \emptyset$.

Úloha pre Teba. Určite si si všimol/všimla, že pri predošlých troch vetách chýbajú dôkazy. Skús na nich popracovať sám/sama.

5.5 Operácia doplnku množiny

Definícia 5.44. Majme nejakú množinu U (tzv. univerzum, „svet“) a jej podmnožinu A . Potom doplnok množiny A vzhľadom k množine U je množina $U \setminus A$.

Značenie 5.45. Doplnok množiny A značíme rôzne: $\overline{A}$, A^C , alebo A' .



Príklad 5.46. $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A = \{1, 2, 3\}$, $\overline{A} = \{4, 5\}$.

Príklad 5.47. $U = \{\text{žaba, sova, pavúk, slimák}\}$, $A = \{\text{sova, slimák}\}$, $\overline{A} = \{\text{žaba, pavúk}\}$.

Príklad 5.48. $U = \{a, b, c, d\}$, $A = \{x, y\}$, $\overline{A}$ vzhľadom k U neexistuje, lebo $A \not\subseteq U$.

Veta 5.49. Prienik množiny a jej doplnku je prázdna množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \cap \overline{A} = \emptyset$.

Veta 5.50. Zjednotenie množiny a jej doplnku je univerzum. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \cup \overline{A} = U$.

Veta 5.51. Doplnok k doplnku je pôvodná množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $\overline{(\overline{A})} = A$.

Veta 5.52. Doplnok k univerzu je prázdna množina. Teda pre univerzum U platí: $\overline{U} = \emptyset$.

Veta 5.53. Doplnok k prázdnej množine je univerzum. Teda: $\overline{\emptyset} = U$.

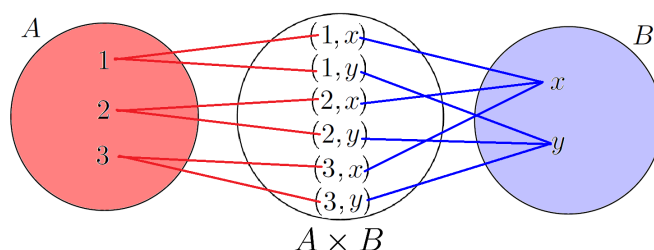
Úloha pre Teba. Skús popracovať na dôkazoch predošlých viet.

5.6 (*) Operácia karteziánskeho súčinu množín

Definícia 5.54. Usporiadaná dvojica („pár“) (a, b) je definovaná množinou $\{\{a\}, \{a, b\}\}$.

Definícia 5.55. Karteziánsky súčin množín A, B (v tomto poradí) je množina všetkých takých usporiadaných dvojíc (a, b) , že prvý prvok a z každej dvojice patrí do množiny A a druhý prvok b z každej dvojice patrí do množiny B .

Značenie 5.56. Karteziánsky súčin množín A, B (v tomto poradí) značíme $A \times B$.



Príklad 5.57. $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{x, y\}$, $A \times B = \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y)\}$.

Príklad 5.58. $A = \{\text{žaba, ryba}\}$, $B = \{\text{pes, mačka}\}$, $A \times B = \{(\text{žaba, pes}), (\text{ryba, pes}), (\text{žaba, mačka}), (\text{ryba, mačka})\}$.

Príklad 5.59. $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{e\}$, $A \times B = \{(a, e), (b, e), (c, e), (d, e)\}$.

Poznámka. Karteziánsky súčin množín formálne definujeme nasledovne:

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A \wedge b \in B\}.$$

Čítame: „Karteziánsky súčin množín A, B sa rovná množine usporiadaných dvojíc (a, b) , kde $a \in A$ a zároveň $b \in B$.“

Poznámka. Karteziánsky súčin množín nie je komutatívny. Záleží na poradí množín.

Veta 5.60. Karteziánsky súčin nejakej množiny a prázdnej množiny (alebo v opačnom poradí) je prázdna množina. Teda pre ľubovoľnú (aj prázdnu) množinu A platí: $A \times \emptyset = \emptyset \times A = \emptyset$.

Veta 5.61 (Pravidlo súčinu). Kardinalita množiny, ktorá vznikne po aplikovaní operácie karteziánskeho súčinu je rovná súčinu kardinalít jednotlivých množín. Teda: $|A \times B| = |A| \cdot |B|$.

Úloha pre Teba. Zamysli sa, prečo platia predošlé dve vety.

5.7 (*) Potenčná množina

Definícia 5.62. Potenčná množina množiny A je množina všetkých podmnožín množiny A . (To je ale veľa slov „množina“ naraz! Skús si to prečítať znovu.)

Značenie 5.63. Potenčnú množinu množiny A značíme 2^A .

Príklad 5.64. $A = \{a, b\}$, $2^A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$.

Príklad 5.65. $B = \{\text{žaba}, \text{ryba}\}$, $2^B = \{\emptyset, \{\text{žaba}\}, \{\text{ryba}\}, \{\text{žaba}, \text{ryba}\}\}$.

Poznámka. Potenčnú množinu množiny A formálne definujeme nasledovne:

$$2^A := \{B \mid B \subseteq A\}.$$

Čítame: „Potenčná množina množiny A sa rovná množine všetkých takých množín B , že B je podmnožinou množiny A .“

Veta 5.66. *Potenčná množina prázdnej množiny je prázdna množina. Teda: $2^\emptyset = \emptyset$.*

Veta 5.67. *Kardinalita potenčnej množiny množiny A je rovná číslu 2 umocnenému na kardinalitu množiny A . Teda: $|2^A| = 2^{|A|}$.*

Úloha pre Teba. Zamysli sa, prečo platia predošlé dve vety.

5.8 Zhrnutie

$\cap$	A	$\emptyset$
A	A	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\cup$	A	$\emptyset$
A	A	A
$\emptyset$	A	$\emptyset$

$\setminus$	A	$\emptyset$
A	$\emptyset$	A
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

$\triangle$	A	$\emptyset$
A	$\emptyset$	A
$\emptyset$	A	$\emptyset$

Poznámka. (📺) Ďalšie príklady nájdeš vo videu Množinový kalkul [5], čas 5:42–12:18.

Kapitola 6: Intervaly

(📺) Výklad k tejto Kapitole nájdeš vo videu Množinové operácie a intervaly [2], čas 6:50–14:26.

6.1 Otvorený interval

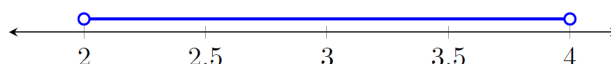
Definícia 6.1. Majme dané dve reálne čísla $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. *Otvorený interval* od a do b je množina všetkých reálnych čísel väčších ako a a menších ako b .

Príklad 6.2. Otvorený interval od 0 do 1 je množina všetkých čísel väčších ako 0 a menších ako 1. Do tejto množiny patria napríklad čísla $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ alebo 0,75.

Definícia 6.3. Čísla a, b nazývame *krajné body* intervalu. Číslo a je *ľavým* krajným bodom, číslo b je *pravým* krajným bodom. Tieto pomenovania platia pre celú Kapitulu 6.

Značenie 6.4. Otvorený interval od a do b značíme v okrúhlych zátvorkách: (a, b) . Ak by použitie oddeľujúcej čiarky mohlo viesť k zámene s desatinnou čiarkou, môžeme použiť bodkočiarku a otvorený interval značiť: $(a; b)$.

Príklad 6.5. Interval $(2, 4)$ môžeme znázorniť na číselnej osi nasledovne:



Všimni si, že krajné body do intervalu *nepatria*. Preto krúžky, ktoré značia krajné body sú prázdne (nevyplnené).

6.2 Uzavretý interval

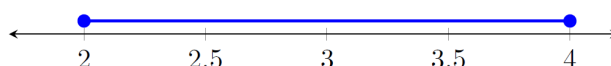
Definícia 6.6. Majme dané dve reálne čísla $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. *Uzavretý interval* od a do b je množina všetkých reálnych čísel väčších alebo rovných a a menších alebo rovných b .

Príklad 6.7. Uzavretý interval od 0 do 1 je množina všetkých čísel väčších alebo rovných 0 a menších alebo rovných 1. Do tejto množiny patria napríklad čísla 0, 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ alebo 0,75.

Značenie 6.8. Uzavretý interval od a do b značíme v hranatých zátvorkách: $[a, b]$. Ak by použitie oddeľujúcej čiarky mohlo viesť k zámene s desatinnou čiarkou, môžeme použiť bodkočiarku a uzavretý interval značiť: $[a; b]$.

Iný spôsob značenia uzavretého intervalu je v uhlových zátvorkách: $\langle a, b \rangle$. Tie sa ale pri písaní rukou môžu ľahko zameniť s okrúhlymi zátvorkami.

Príklad 6.9. Interval $[2, 4]$ môžeme znázorniť na číselnej osi nasledovne:



Všimni si, že krajné body do intervalu *patria*. Preto krúžky, ktoré značia krajné body sú plné (vyplnené).

Príklad 6.10. Trvanie letných prázdnin, napríklad od 1. júla do 1. septembra, je príkladom uzavretého intervalu. Prvý uvedený deň (ľavý krajný bod) je 1. júl a v tento deň už sú prázdniny, takže deň do intervalu patrí. Posledný uvedený deň (pravý krajný bod) je 1. september a v tento deň sú ešte prázdniny, takže deň do intervalu patrí.

6.3 Polouzavreté intervaly

Definícia 6.11. Majme dané dve reálne čísla $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$. Medzi *polouzavreté intervaly* patria tieto dva intervaly:

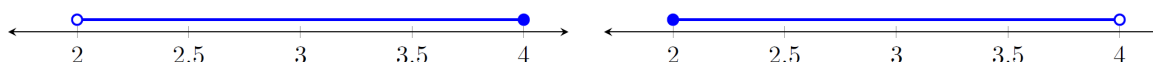
- *Zľava otvorený, sprava uzavretý interval* od a do b je množina všetkých reálnych čísel väčších ako a a menších alebo rovných b ;
- *Zľava uzavretý, sprava otvorený interval* od a do b je množina všetkých reálnych čísel väčších alebo rovných a a menších ako b ;

Príklad 6.12. Zľava otvorený, sprava uzavretý interval od 0 do 1 je množina všetkých čísel väčších ako 0 a menších alebo rovných 1. Do tejto množiny patria napríklad čísla 1, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ alebo 0,75. Nepatrí sem číslo 0.

Príklad 6.13. Zľava uzavretý, sprava otvorený interval od 0 do 1 je množina všetkých čísel väčších alebo rovných 0 a menších ako 1. Do tejto množiny patria napríklad čísla 0, $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$ alebo 0,75. Nepatrí sem číslo 1.

Značenie 6.14. Zľava otvorený, sprava uzavretý interval od a do b značíme $(a, b]$. Zľava uzavretý, sprava otvorený interval od a do b značíme $[a, b)$.

Príklad 6.15. Intervaly $(2, 4]$ a $[2, 4)$ môžeme znázorniť na číselnej osi nasledovne:



Príklad 6.16. Otváracie hodiny obchodu, napríklad od 7:00 do 19:00, sú príkladom zľava uzavretého, sprava otvoreného intervalu. O 7:00 (ľavý krajný bod) je obchod otvorený a môžeš nakupovať, takže čas do intervalu patrí. O 19:00 (pravý krajný bod) už obchod zatvára a pravdepodobne Ťa už nepustia dnu, takže čas do intervalu nepatrí.

6.4 Priebežné zhrnutie

Majme dané dve reálne čísla $a, b \in \mathbb{R}$, kde $a < b$.

Interval	Formálna definícia
Otvorený	$(a, b) := \{x \mid a < x < b\}$
Uzavretý	$[a, b] := \{x \mid a \leq x \leq b\}$
Zľava otvorený, sprava uzavretý	$(a, b] := \{x \mid a < x \leq b\}$
Zľava uzavretý, sprava otvorený	$[a, b) := \{x \mid a \leq x < b\}$

Úloha pre Teba. Over si, že dokážeš ľahko čítať matematické definície v tabuľke.

6.5 Intervaly obsahujúce nekonečno

Majme dané dve reálne čísla $a, b \in \mathbb{R}$.

Interval	Formálna definícia
Zľava otvorený	$(a, \infty) := \{x \mid a < x\}$
Zľava uzavretý	$[a, \infty) := \{x \mid a \leq x\}$
Sprava otvorený	$(-\infty, b) := \{x \mid x < b\}$
Sprava uzavretý	$(-\infty, b] := \{x \mid x \leq b\}$
Množina reálnych čísel	$(-\infty, \infty) := \mathbb{R}$

Poznámka. Všimni si, že interval je na strane nekonečna vždy otvorený. Plus alebo mínus nekonečno samé o sebe nie sú čísla, preto nikdy nemôžu patriť do intervalu.

6.6 (*) Hraničné prípady intervalov

Majme dané reálne číslo $a \in \mathbb{R}$.

- Uzavretý interval $[a, a]$ sa rovná jednoprvkovej množine $\{a\}$.
- Otvorený interval (a, a) sa rovná prázdnej množine $\emptyset$.
- Polouzavretý interval $(a, a]$ alebo $[a, a)$ nemá zmysel.

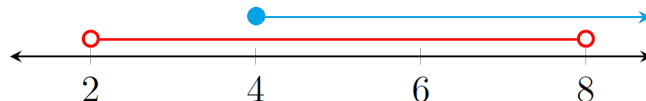
Ak je ľavý krajný bod intervalu väčší ako pravý krajný bod, napríklad v intervale $(5, 1)$, interval sa rovná prázdnej množine $\emptyset$.

6.7 Množinové operácie na intervaloch

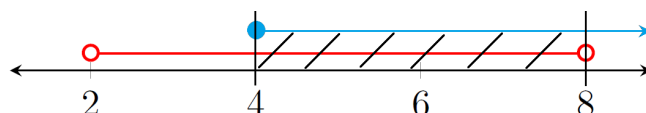
V Kapitole 5 sme si definovali niekoľko množinových operácií, napríklad prienik, zjednotenie, alebo rozdiel. Keďže interval je množina, tieto operácie môžeme aplikovať aj na intervaly.

Príklad 6.17. Majme dané dve množiny: A je množina reálnych čísel väčších ako 2 a menších ako 8; B je množina reálnych čísel väčších alebo rovných 4. Zapišme tieto množiny matematicky a načrtnime ich na číselnej osi.

- A je množina $\{x \in \mathbb{R} \mid 2 < x < 8\}$, teda otvorený interval $(2, 8)$.
- B je množina $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 4\}$, teda polouzavretý interval $[4, \infty)$.

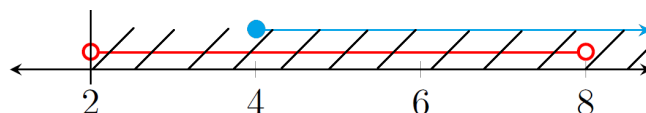


Príklad 6.18. Nájdime prienik $A \cap B$ množín A, B z Príkladu 6.17.



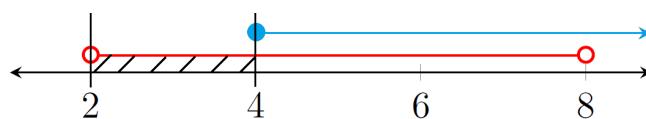
$A \cap B = [4, 8)$. Tento interval obsahuje všetky reálne čísla, ktoré obsahujú oba intervaly A, B zároveň. Všimni si, že číslo 4 patrí do výsledku, pretože patrí do oboch intervalov A, B naraz. Naproti tomu číslo 8 do výsledku nepatrí, pretože aj keď $8 \in B$, tak $8 \notin A$.

Príklad 6.19. Nájdime zjednotenie $A \cup B$ množín A, B z Príkladu 6.17.



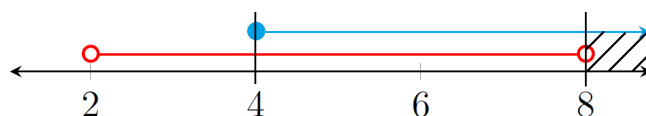
$A \cup B = (2, \infty)$. Tento interval obsahuje všetky reálne čísla, ktoré obsahuje interval A alebo interval B . Číslo 2 do výsledku nepatrí, pretože $2 \notin A$ a $2 \notin B$.

Príklad 6.20. Nájďme rozdiel $A \setminus B$ množín A, B z Príkladu 6.17.



$A \setminus B = (2, 4)$. Z množiny A sme odobrali všetky prvky, ktoré patria do množiny B . Všimni si, že číslo 4 do výsledku nepatrí, pretože $4 \in A$ a $4 \in B$, takže sme ho museli odobrať.

Príklad 6.21. Nájďme rozdiel $B \setminus A$ množín B, A z Príkladu 6.17.



$B \setminus A = [8, \infty)$. Z množiny B sme odobrali všetky prvky, ktoré patria do množiny A . Všimni si, že číslo 8 do výsledku patrí, pretože $8 \notin A$ a $8 \in B$, takže sme ho neodobrali.

Príklad 6.22. Nájďme symetrický rozdiel $A \triangle B$ množín A, B z Príkladu 6.17.

$A \triangle B = (2, 4) \cup [8, \infty)$. Toto je zjednotenie výsledkov predošlých dvoch príkladov.

Kapitola 7: Množinové diagramy

() Výklad k tejto Kapitole nájdeš vo videu Príklady na Vennove diagramy [3], čas 0:00–10:59.

7.1 Eulerove diagramy

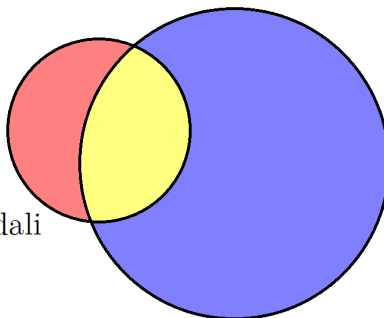
Definícia 7.1. Eulerov diagram je skupina kriviek, ktorá ukazuje vzťahy medzi množinami.

Príklad 7.2. Študenti matematiky:

tí, ktorí sa ešte chytajú



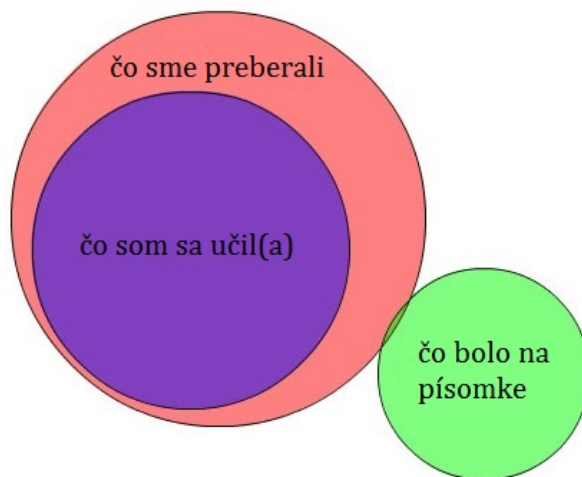
tí, ktorí to vzdali



tí, ktorí spia

Poznámka. Ak ešte nespíš: Eulerov diagram je teda nejaký obrázok, ktorý popisuje množinové vzťahy. Všimni si, že v diagrame vyššie existuje prienik medzi študentmi, ktorí to vzdali a študentmi, ktorí spia. To znamená, že existujú študenti, ktorí to vzdali a zaspali. Diagram ale nezobrazuje prienik množín „študenti, ktorí sa ešte chytajú“ a „študenti, ktorí spia“, lebo takí študenti neexistujú.

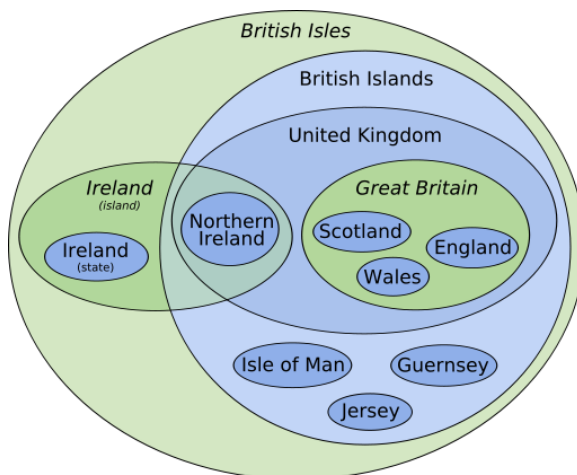
Príklad 7.3. Preložil som do slovenčiny jeden Eulerov diagram prevzatý z [14].



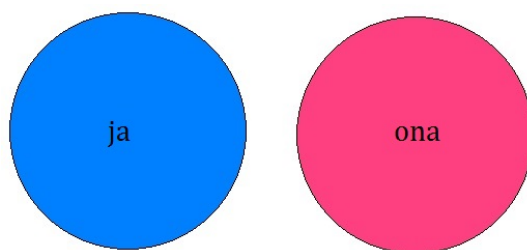
Príklad 7.4. S Eulerovým diagramom sme sa stretli v Podkapitole 2.2 o vzťahu inklúzie, v Príklade 2.13 (podmnožina štvornohých zvierat).

Príklad 7.5. S Eulerovým diagramom sme sa stretli takisto v Kapitole 3 o nekonečných množinách ($\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$).

Príklad 7.6. Eulerov diagram môže zobrazovať veľmi komplexné vzťahy [15]:



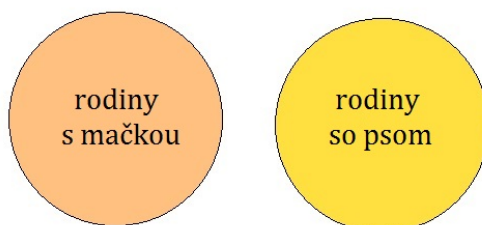
Príklad 7.7. Eulerov diagram nemusí mať žiadny prienik. Tento venujem všetkým čitateľom-chalanom, ktorí boli aspoň raz vo *friendzone*:



To je celkom smutná situácia v živote modrého krúžku.

Poznámka. Na záver rozprávania o Eulerových diagramoch sa naučíme veľmi jednoduchú, ale dôležitú vetu o operácii zjednotenia (zjednotenie sme definovali v Podkapitole 5.2).

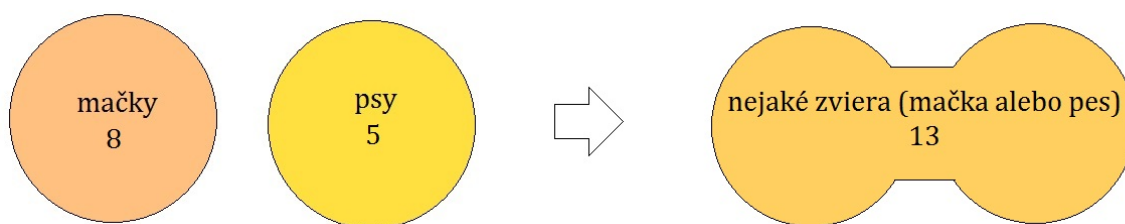
Príklad 7.8. Predstav si dve skupiny (množiny) rodín, ktoré vlastnia domáce zvieratá. Jedna množina rodín má len mačky, druhá množina rodín má len psy. Ani jedna rodina nemá obe zvieratá naraz. Nakoniec, každá rodina má len jedno jediné zvieratko.



Označme písmenom M množinu rodín, ktoré majú len mačky. Povedzme, že množina M má kardinalitu (veľkosť) 8. To znamená, že 8 rodín má doma len mačku.

Ďalej označme písmenom P množinu rodín, ktoré majú len psy. Povedzme, že množina P má kardinalitu (veľkosť) 5. To znamená, že 5 rodín má doma len psa.

Potom množina $M \cup P$ bude predstavovať množinu všetkých rodín, ktoré majú doma nejaké zviera: buď mačku alebo psa. Táto množina bude mať kardinalitu $8 + 5 = 13$.



Tento príklad teraz zovšeobecníme do novej vety, ktorú nazveme Pravidlo súčtu.

Veta 7.9 (Pravidlo súčtu). *Majme dve množiny A , B , ktoré sú disjunktné (teda ich prienik je $\emptyset$). Potom kardinalita ich zjednotenia je rovná súčtu kardinalít jednotlivých množín. Inak povedané: $|A \cup B| = |A| + |B|$.*

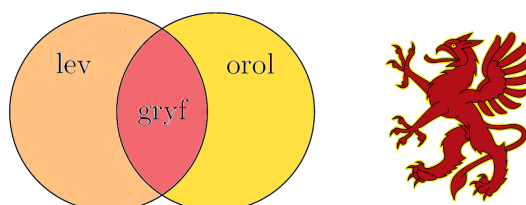
Poznámka. A vraj jednoduché! Isto si práve hovoríš: „Čože?“ Žiadny strach, je to to isté, čo v predošlom príklade. Ak má nejaká množina A kardinalitu x , množina B má kardinalitu y , a prienik $A \cap B$ má kardinalitu 0 (dôležitá!), potom kardinalita zjednotenia $A \cup B$ je $x + y$. Skús si toto pravidlo aplikovať na rôzne príklady.

Dôkaz. Uvedieme neskôr po vysvetlení Princípu inklúzie a exklúzie (Veta 7.16). □

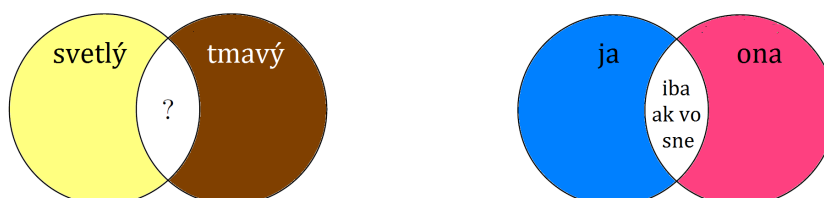
7.2 Vennove diagramy

Definícia 7.10. Vennov diagram je špeciálny prípad Eulerovho diagramu, ktorý ukazuje všetky možné vzťahy (prieniky) medzi danými množinami.

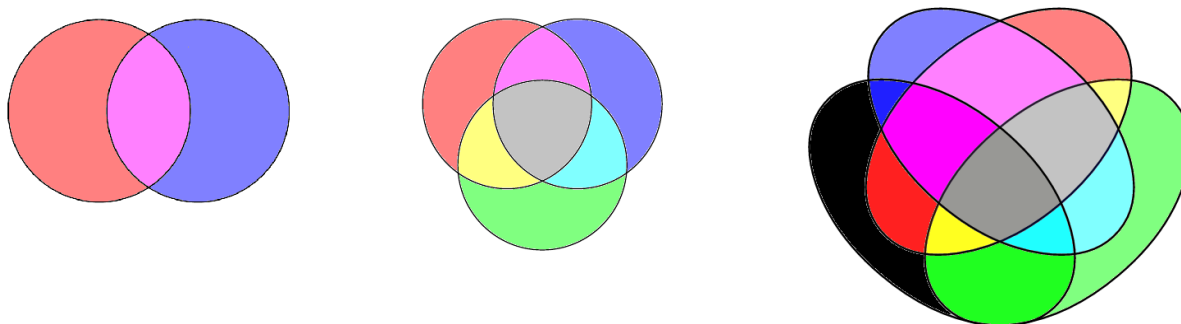
Príklad 7.11. Trochu mytológie:



Poznámka. Vennov diagram vždy zobrazuje všetky zóny – teda všetky možné prieniky daných množín – aj keď nemusia reálne existovať.



Poznámka. Keďže musíme zobrazit všetky možné „zóny prekrytia“, kresba Vennovho diagramu sa stáva náročnejšou pri väčšom počte množín. Ukážme si Vennove diagramy pre dve, tri, a štyri [18] množiny.



Veta 7.12. Počet zón (vrátane vonkajšej) Vennovho diagramu je 2^n pre $n \in \mathbb{N}$ množín.

Príklad 7.13. Skúsme si za n dosadiť konkrétne prirodzené čísla:

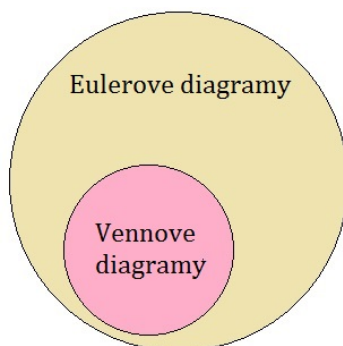
- pre $n = 1$ množinu je počet zón Vennovho diagramu $2^1 = 2$: vnútro kruhu a vonkajšok kruhu.
- pre $n = 2$ množiny je počet zón Vennovho diagramu $2^2 = 4$: $A \setminus B$; $B \setminus A$; prienik $A \cap B$; vonkajšok kruhu.
- pre $n = 3$ množiny je počet zón Vennovho diagramu $2^3 = 8$: $A \setminus B \setminus C$; $B \setminus A \setminus C$; $C \setminus A \setminus B$; $(A \cap B) \setminus C$; $(A \cap C) \setminus B$; $(B \cap C) \setminus A$; $A \cap B \cap C$; vonkajšok kruhu.

Dôkaz. Pokročilý. Len pre vysokoškolákov, matematických fanatikov, a Batmana. Ak nepatríš ani do jednej z týchto skupín, zachráň sa a utekaj! Ak si Batman, kontaktuj ma.

Označme hľadaný počet zón Vennovho diagramu písmenom z . V rámci daného diagramu zvolíme takú zónu, kde sa prekrýva $k \leq n$ množín. Pre $k = 0$ sa jedná o vonkajšiu zónu. Pre $k = 1$ sa jedná o zónu, ktorá sa neprekrýva so žiadnou inou. Pre $k = 2$ sa jedná o zónu, kde sa prekrývajú dve množiny. . . Pre fixné k existuje takýchto zón $\binom{n}{k}$, pretože sa jedná o výber k prvkov z množiny n prvkov. Preto $z = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$. $\square$

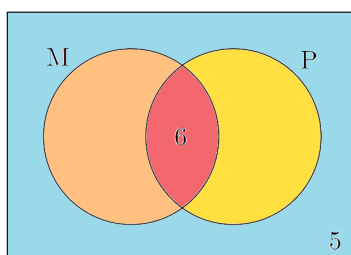
Príklad 7.14. S Vennovým diagramom sme sa stretli tiež v Kapitole 5, pri operáciách prieniku, zjednotenia, rozdielu a symetrického rozdielu.

Poznámka. Keďže Vennov diagram je špeciálnym prípadom Eulerovho diagramu, tak každý Vennov diagram je aj Eulerov diagram. Naopak to ale neplatí, teda nie každý Eulerov diagram je aj Vennov diagram. To znázorňuje tento Eulerov diagram:



Príklad 7.15. Na ulici je postavený neznámy počet domov. Rodiny, ktoré v nich bývajú vlastnia: a) jednu mačku, b) jedného psa, c) jednu mačku a jedného psa, d) ani jedno zviera. Dohromady vo všetkých domoch býva 14 mačiek a 19 psov. V 6 domoch sú obe zvieratá naraz. Nakoniec, v 5 domoch nie je ani jedno zviera. Koľko domov je na ulici?

Počiatočnú situáciu môžeme ilustrovať týmto Vennovým diagramom:

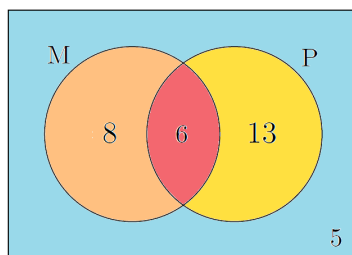


Ohraničujúci obdĺžnik značí množinu všetkých domov. M značí množinu domov, ktoré vlastnia mačku; P značí množinu domov, ktoré vlastnia psa. Všimni si, že 6 domov má mačku aj psa zároveň, preto veľkosť množiny $M \cap P$ je 6. Ďalej 5 domov nemá ani jedno zviera, preto je mimo oboch množín M, P číslo 5.

Vieme, že celkový počet mačiek je 14, teda $|M| = 14$ (všimni si zvislé čiary značiace kardinalitu množiny). Z toho 6 mačiek býva zároveň so psom (v oblasti $M \cap P$ je číslo 6). Preto veľkosť množiny $M \setminus P$, ktorá udáva počet domov, kde je len jedna mačka a žiadny

pes, bude $14 - 6 = 8$. To sedí: máme dohromady 14 mačiek vo všetkých domoch, z toho v 8 domoch je len mačka a v 6 domoch je mačka a pes naraz.

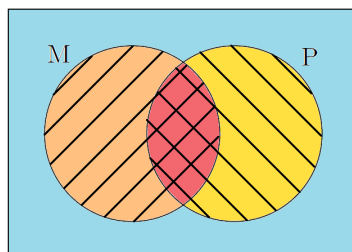
Analogicky spočítame $|P \setminus M| = 19 - 6 = 13$.



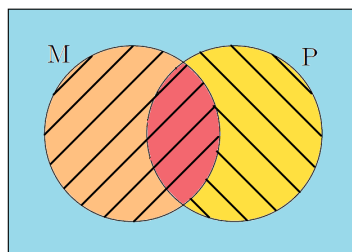
Na ulici teda je: a) 8 domov len s jednou mačkou, b) 13 domov len s jedným psom, c) 6 domov s oboma zvieratami naraz a d) 5 domov bez domácich miláčikov. Dohromady je teda na ulici $8 + 13 + 6 + 5 = 32$ domov.

Poznámka. Tento príklad sa dal vyriešiť aj inak. Na začiatku sme vedeli, že: dohromady vo všetkých domoch býva 14 mačiek a 19 psov. V 6 domoch sú obe zvieratá naraz. Nakoniec, v 5 domoch nie je ani jedno zviera.

Ak chceme zistiť, koľko je dohromady domov s domácim zvieratkom (možnosti sú: jedna mačka, jeden pes, alebo jedna mačka a jeden pes), môžeme sčítať celkový počet domov s mačkami s celkovým počtom domov so psami: $14 + 19 = 33$. Avšak, v tomto súčte 33 sú dvakrát započítané domy, v ktorých sú obe zvieratá naraz!



Sčítali sme celkový počet domov s mačkami s celkovým počtom domov so psami. Pritom sme ale niektoré domy započítali dvakrát. Boli to práve tie domy, kde bývajú obe zvieratá spolu (prieniť množín M a P). Od celkového súčtu domov so všetkými mačkami a všetkými psami musíme odpočítať počet domov s oboma zvieratami (6), lebo sme ho započítali dvakrát. Po odpočítaní tohto prieniku dostávame výsledok $33 - 6 = 27$, ktorý znázorníme takto:



Máme teda 27 domov s jedným alebo dvoma zvieratami a 5 domov bez zvieratka. Celkový počet domov je potom $27 + 5 = 32$. Rovnaký výsledok ako predtým. Dobré, nie?

Toto alternatívne riešenie príkladu teraz zovšeobecníme do novej vety, ktorú nazveme Princíp inklúzie a exklúzie.

Veta 7.16 (Princíp inklúzie a exklúzie). *Majme dve množiny A, B . Potom kardinalita ich zjednotenia je rovná súčtu kardinalít jednotlivých množín, mínus kardinalita ich prieniku. Inak povedané: $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.*

Poznámka. Pripomína Ti to niečo? Pravidlo súčtu (Veta 7.9)? Ak áno, gratulujem! Si veľmi pozorný/á. Ak nie, prejdeme si to detailne. Je to to isté, čo v predošlom príklade. Ak má nejaká množina A kardinalitu x , množina B má kardinalitu y , a prienik $A \cap B$ má kardinalitu z , potom kardinalita zjednotenia $A \cup B$ je $x + y - z$. Skús si toto pravidlo aplikovať na rôzne príklady. Mimochodom, v angličtine sa Princíp inklúzie a exklúzie označuje skratkou PIE (koláč). Mmmmm.

Dôkaz. Aby sme určili kardinalitu zjednotenia $A \cup B$, môžeme sčítať kardinalitu množiny A s kardinalitou množiny B . Tak započítame všetky prvky množiny $A \cup B$ aspoň raz. Avšak, niektoré prvky sme započítali dvakrát. Boli to práve tie, ktoré patria do $A \cap B$. Preto od $|A| + |B|$ musíme odpočítať $|A \cap B|$. Dostávame $|A \cup B|$. $\square$

Poznámka. Vráťme sa teraz k dôkazu Pravidla súčtu (Veta 7.9), ktorý sme vynechali.

Dôkaz (Pravidlo súčtu). Pravidlo súčtu hovorí, že ak sú množiny A, B disjunktné, tak $|A \cup B| = |A| + |B|$. Ak sú množiny A, B disjunktné, tak $|A \cap B| = 0$. Dosadíme do platného Princípu inklúzie a exklúzie (Veta 7.16) a dostávame:

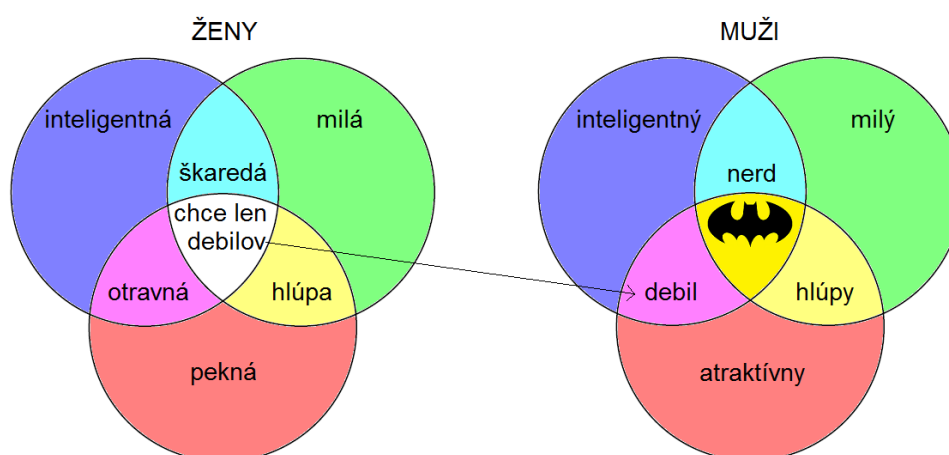
$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B| = |A| + |B| - 0 = |A| + |B|.$$

Dokázali sme Pravidlo súčtu ako špeciálny prípad Princípu inklúzie a exklúzie. $\square$

Tvrdenie 7.17. *Princíp inklúzie a exklúzie vieme zovšeobecniť pre ľubovoľný počet množín. Napríklad pre 3 množiny:*

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Príklad 7.18. Na záver dva Vennove diagramy zo života pre pobavenie [14][17]:



Referencie

- [1] *Nauč sa matiku – Množiny – Úvod*. Dostupné na URL: <http://www.youtube.com/watch?v=v0Wbh-WowWE>
- [2] *Nauč sa matiku – Množiny – Množinové operácie a intervaly*. Dostupné na URL: <http://www.youtube.com/watch?v=kHwrnQpUptk>
- [3] *Nauč sa matiku – Množiny – Príklady na Vennove diagramy*. Dostupné na URL: <http://www.youtube.com/watch?v=08ZBCU41qj8>
- [4] *Nauč sa matiku – Množiny – Nekonečné množiny*. Dostupné na URL: <http://www.youtube.com/watch?v=HIoXf3CFFrk>
- [5] *Nauč sa matiku – Množiny – Množinový kalkul*. Dostupné na URL: <http://www.youtube.com/watch?v=AnbnOywm0RA>
- [6] *Creative Commons: Uveďte autora-Neužívajte dílo komerčne-Zachovejte licenci 4.0 Mezinárodní*. Dostupné na URL: <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.cs>
- [7] *Animal diversity October 2007 for thumbnail* by en:User:Justin, User:Samsara - http://en.wikipedia.org/wiki/Image:Animal_diversity_October_2007.jpg. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Animal_diversity_October_2007_for_thumbnail.jpg#/media/File:Animal_diversity_October_2007_for_thumbnail.jpg
- [8] *YouTube icon* by YouTube - youtube.com. Licensed under Public Domain via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:YouTube_icon.png#/media/File:YouTube_icon.png
- [9] <http://www.public-domain-image.com/animals/dog/slides/good-dog.html>
- [10] <http://www.public-domain-image.com/animals/cat/slides/cute-cat-sitting-on-the-path-on-the-garden.html>
- [11] <http://www.public-domain-image.com/fauna-animals-public-domain-images-pictures/horses-public-domain-images-pictures/a-wild-horse-runs-gleefully-on-refuge-land.jpg.html>
- [12] <http://www.public-domain-image.com/fauna-animals-public-domain-images-pictures/fishes-public-domain-images-pictures/sea-fish-on-white-background.jpg.html>
- [13] <http://www.public-domain-image.com/fauna-animals-public-domain-images-pictures/birds-public-domain-images-pictures/african-yellow-necked-spurfowl-or-yellow-necked-francolin-birds-pternistis-leucoscepus-family-phasianidae.jpg.html>
- [14] <http://www.pophangover.com/9836/10-funny-venn-diagrams/>

- [15] *British Isles Euler diagram 15* by TWCarlson - Own work. Licensed under CC0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:British_Isles_Euler_diagram_15.svg#/media/File:British_Isles_Euler_diagram_15.svg
- [16] <http://pixabay.com/en/dragon-crest-flag-swiss-griffin-145518/>
- [17] <http://themetapicture.com/men-the-venn-diagram/>
- [18] *Venn's four ellipse construction* by RupertMillard - Own work by uploader - I made this in Inkscape from my own recollection of Venn's construction. Licensed under CC BY-SA 3.0 via Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Venn%27s_four_ellipse_construction.svg#/media/File:Venn%27s_four_ellipse_construction.svg